www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

DIRECTION DE LA METEOROLOGIE NATIONALE
ECOLE NATIONALE DE LA METEOROLOGIE

CONCOURS EXTERNE 1990
D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX DE LA METEOROLOGIE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES (I) Durée : 3 heures Coefficient : 2

La notation prendra en compte la rigueur et la clarté des raisonnements et explications, ainsi que le soin apporté à la présentation.

Certaines questions peuvent être traitées en admettant les résultats des questions précédentes.

I) 1°) Calculer, pour tout couple (p,m) d'entiers naturels l'intégrale

$$I_{p,m} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos px \cos mx \, dx$$

2°) Pour tout entier naturel k, donner l'expression de $\cos^{2k}\theta$ en fonction de $\cos 2\theta$, $\cos 4\theta$, ..., $\cos 2k\theta$; ainsi que l'expression de $\cos^{2k+1}\theta$ en fonction de $\cos\theta$, $\cos 3\theta$, ..., $\cos(2k+1)\theta$ (θ réel).

3°) Calculer, pour tout couple (p,n) d'entiers naturels, l'intégrale

$$J_{p,n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos p\theta \cos^{n}\theta \, d\theta$$

(On distinguera les cas : $n < p$ et $n \geqslant p$).

4°) A tout couple (p,n) dans $\mathbb{N}^2$ on associe la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g_{p,n}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x\cos\theta} \cos p\theta \cos^{n}\theta \, d\theta$$

Exprimer pour $p \geqslant 1$ et pour $n \geqslant 1$ la demi-somme : $\frac{1}{2}(g_{p+1,n-1} + g_{p-1,n-1})$ en fonction de $g_{p,n}$.

5°) x étant donné dans $\mathbb{R}$, calculer la dérivée en tout point θ de $\mathbb{R}$ de la fonction : $G : \theta \longmapsto G(\theta) = e^{x\cos\theta}(x \cos p\theta \sin\theta - p \sin p\theta)$

De ce calcul déduire une expression de $x\, g_{p,1}(x)$ en fonction de p, x, $g_{p,0}(x)$ et $g_{p,2}(x)$.

6°) Démontrer que pour tout entier naturel k et pour tout t réel on a :

$$\left| e^{t} - 1 - t - \ldots - \frac{t^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|t|^{k+1}}{(k+1)!} e^{|t|}$$

.../...

7°) Utilisant ce résultat, montrer que la fonction $g_{p,n}$ est continue puis dérivable, sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est la fonction $g_{p,n+1}$

II) A tout $p \in \mathbb{N}$, on associe la fonction I_p définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$I_p(x) = g_{p,0}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x \cos\theta} \cos p\theta \, d\theta$$

1°) Montrer que I_p est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de sa dérivée $n^{ième}$, $I_p^{(n)}$ en fonction de $g_{p,n}$

2°) Démontrer que I_p est développable en série de Mac-Laurin de rayon de convergence infini.

3°)Expliciter ce développement grâce aux résultats du I 3°).

4°) p étant donné dans $\mathbb{N}$, établir l'existence de solutions sur $\mathbb{R}$:

$t \longmapsto z(t)$ de l'équation différentielle (E_p) $tz'' + (p+1)z' - z = 0$

développables sur $\mathbb{R}$ en série entière en t sous la forme

$$z(t) = a_0 + a_1 t + \ldots\ldots + a_n t^n + \ldots\ldots,$$

série entière dont on explicitera les coefficients en fonction de a_0.

Vérifier que l'ensemble de ces solutions constitue une droite vectorielle.

5°) Vérifier que si z est solution sur $\mathbb{R}$ de (E_p) alors la fonction

$x \longmapsto u(x) = z\left(\frac{x^2}{4}\right)$ est solution d'une équation différentielle du type suivant : (E'_p) $x\,u'' + \alpha u' + \beta x u = 0$ où α et β sont deux cons tantes dont on donnera les valeurs.

6°) Vérifier que si u est solution sur $\mathbb{R}$ de (E'_p) alors la fonction

$y : x \longmapsto y(x) = x^p u(x)$ est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle de la forme : $x^2 y'' + a(x) y' + b(x) y = 0$ où a (x) et b (x) sont des fonctions polynômes que l'on explicitera.

.../...

III) 1°) Déduire du II) que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, I_p est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : (F_p) $x^2 y'' + x y' - (x^2 + p^2) y = 0$

2°) Retrouver ce résultat en utilisant le I) 5°).

3°) Y désignant une fonction réelle définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, expliciter la dérivée première, puis, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la dérivée $n^{ième}$ $\phi^{(n)}(x)$ de la fonction :

$$\phi : x \longmapsto \phi(x) = x^2 Y''(x) + xY'(x) - (x^2 + p^2) Y(x)$$

4°) Donner les valeurs de $\phi(0)$, $\phi'(0)$ puis de $\phi^{(n)}(0)$ pour tout $n \geqslant 2$.

En déduire la valeur de $y^{(n)}(0)$ pour tout $n < p$.

5°) Montrer que l'ensemble des solutions de (F_p) qui sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ est la droite vectorielle engendrée par la fonction I_p définie dans II).

IV) 1°) On considère l'équation différentielle :

$$(F) \qquad x^2 y'' + xy' - (x^2 + \frac{1}{4}) y = 0$$

dont on cherche la solution générale sur $]0, +\infty[$

Ecrire l'équation différentielle (F') obtenue en faisant dans (F) le changement de fonction inconnue défini par : $y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} z(x)$ et donner sa solution générale sur $\mathbb{R}$; en déduire la solution générale de (F) sur $]0, +\infty[$

2°) Vérifier alors l'existence de 2 fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$, paires, développables en série entière en x, vérifiant $f(0) = g(0) = 1$ et telles que les fonctions

$$y_1 : x \longmapsto y_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} f(x) \text{ et } y_2 : x \longmapsto y_2(x) = \sqrt{x}\, g(x)$$

soient solutions de (F) sur $\mathbb{R}$

3°) Plus généralement démontrer que si ν est un réel positif non entier l'équation différentielle : (F_ν) $x^2 y'' + x y' - (x^2 + \nu^2) y = 0$ admet sur $]0, +\infty[$ des solutions de la forme :

$$y_1 : x \longmapsto y_1(x) = x^{\nu} f(x) \text{ et } y_2 : x \longmapsto y_2(x) = x^{-\nu} g(x)$$

où f et g sont des fonctions paires, développables en série entière en x sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f(0) = g(0) = 1$.

En déduire la solution générale de (F_ν).

• • •

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail